მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 380

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

~~$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\ldots+\frac{1}{2012\sqrt[3]{2011}} \geq \frac{1}{1}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$~~

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}=\frac{3+\sqrt[3]{4}}{3\cdot 2} \qquad \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}{3\cdot 4}$$

$$\frac{1}{k\sqrt[3]{k-1}}+\frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}}=\frac{\frac{k+1}{\sqrt[3]{k-1}}+\frac{k}{\sqrt[3]{k}}}{k(k+1)}=\frac{\frac{k+1}{\sqrt[3]{k-1}}+\sqrt[3]{k^2}}{k(k+1)}$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\ldots+\frac{1}{2012\sqrt[3]{2011}}$. გავამრავლოთ 2-ზე და [illegible] [illegible] [illegible]

$$\frac{t}{2\cdot 3}+\frac{t}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{t}{2011\cdot 2012}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2012\sqrt[3]{2011}}=$$

$$=t\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2012}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2012\sqrt[3]{2011}}=$$

$$=t\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2012}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2012\sqrt[3]{2011}}<\frac{t+1}{2}+\frac{t+1}{2012}<6$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 380

ამოცანა № 2

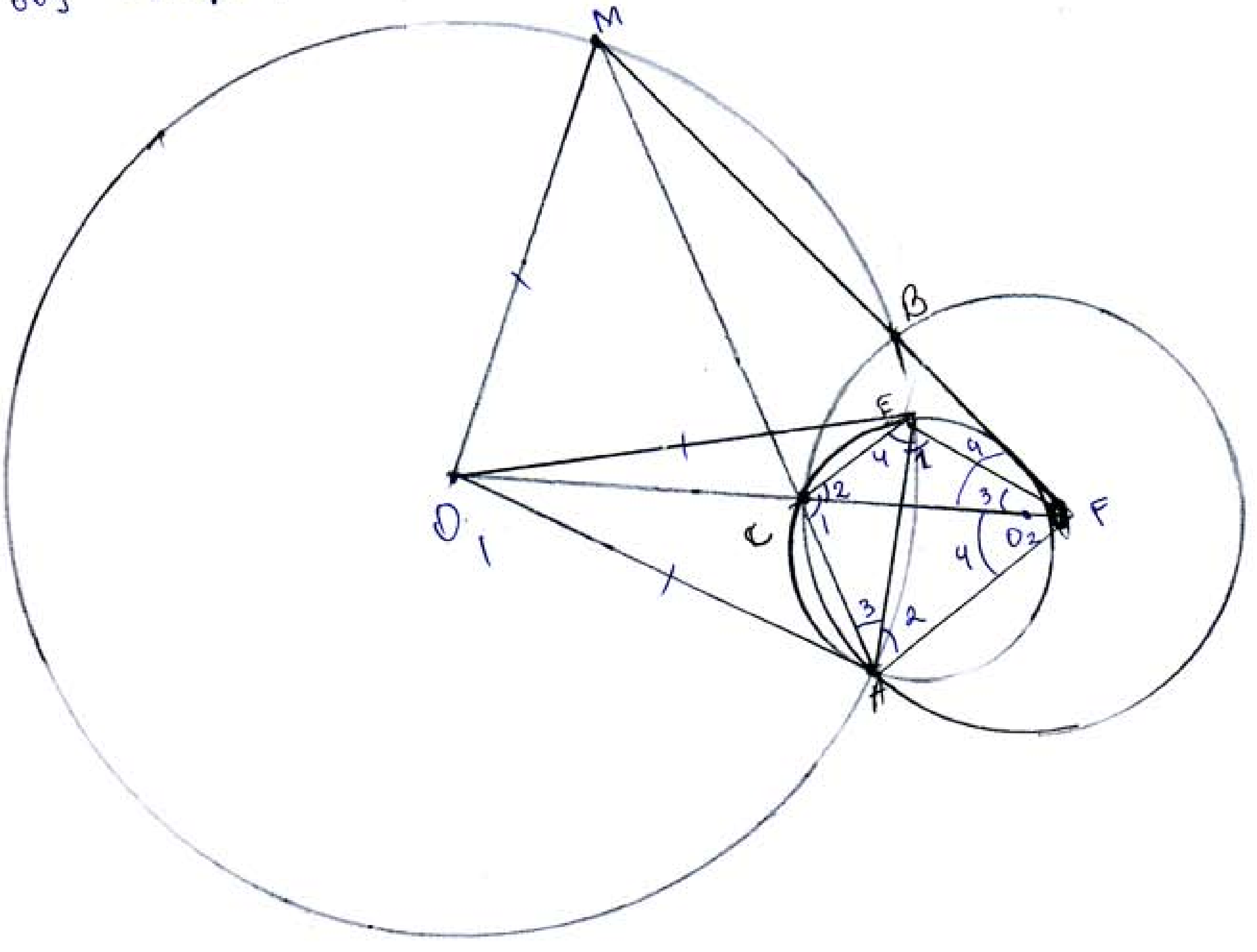
გვერდი № 1

$\square ACEF$ - [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ რადგან O_1O_2 [illegible] [illegible] [illegible] ანუ $\angle AFC=\angle CFB=4$

$\angle MCF=180-1-2$. რადგან $\square ACEF$ [illegible]. ანუ $1+2+3+4=180$

ანუ $\angle MCF=2+3+4 \Rightarrow \angle CMF=180-2-3-4-4=1-4$.



$\angle O_1MA=\alpha$ რადგან $AO_1=O_1M \Rightarrow \angle O_1AM=\alpha$.

~~$AO_1C=1-\alpha$~~ $\angle AO_1C+\alpha=1 \Rightarrow \angle AO_1C=1-\alpha$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 380

ამოცანა № 2

ადვილად შევამჩნევთ რომ $MC \cdot AC = O_1C \cdot CF \Rightarrow$

$\Rightarrow \square AO_1MF$ - ჩახაზვადია $\Rightarrow \angle AMF = \angle AO_1F = 1-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AO_1F = 1-4 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 4$

თუ $\alpha = 4$ მაშინ მხოლოდ მაშინ როცა O_1A მხებია.

რადგან $4 = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow O_1AC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ ანუ O_1A მხებია.

$O_1A = O_1E$ რადგან ω_1 წრეწირის რადიუსია.

ანუ O_1E-ც არის მხები.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 380

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

ვთქვათ $f(x)=a_0x^n+\dots+a_{n-1}x+a_n \in N_0$ ~~ვ[illegible]~~

ვთქვათ $f(k)=t$. მაშინ $f(f(k))=f(t)=k+2011$.

$f(t)-f(k)=a_0(t^n-k^n)+a_1(t^{n-1}-k^{n-1})+\dots+a_{n-1}(t-k)$.

$t^i-k^i \vdots t-k$

ანუ $f(t)-f(k)=(t-k)(\dots)$.

$f(t)$ [illegible] $f(k)$-ს [illegible] t-ც და [illegible] k-ს.

ანუ $f(t)-f(k)$ [illegible]. ე.ი. $t-k$ [illegible].

ანუ $f(t)-f(k)=(t-k)(\dots)$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible].

ა) თუ [illegible] [illegible]. $f(t)-f(k)=k+2011-t=2011-(t-k)$

$t-k \vdots t-k$ ანუ $2011 \vdots t-k$ ანუ $t-k=-2011;-1;1;2011$

$t=k-2011$ $f(k)=k-2011$ $f(f(k))=f(k-2011)=k-2011-2011\neq k+2011$

$t=k-1$ $f(k)=k-1$ $f(f(k))=f(k-1)=k-2\neq k+2011$

$t=k+1$ $f(k)=k+1$ $f(f(k))=f(k+1)=k+2\neq k+2011$

$t=k+2011$ $f(k)=k+2011$ $f(f(k))=f(k+2011)=k+2\cdot 2011\neq k+2011$

ანუ $t=k$ [illegible] [illegible], რადგან $f(t)-f(k)=(t-k)(\dots)$..

ანუ $f(k)=k$ $f(f(k))=k\neq k+2011$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 380

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

ბ) თუ არის წილადი

მაშინ $f(t)-f(k)=k+2011-t=2011-(t-k)=(t-k)\cdot\frac{p}{q}$

სადაც p და q უკვეცია და სადაც p და q მთელი რიცხვია.

$$2011=\frac{p+q}{q}\cdot(t-k)$$

$$q \mid (t-k) \qquad t-k=e\cdot q$$

$$2011=(p+q)\cdot e \Rightarrow e=-2011;\ -1;\ 1;\ 2011$$

თუ $e=-2011$ $p+q=-1$ $p=-q-1$. => p ან q უარყოფითია.

რადგან p თუ არის უარყოფითი ანუ $q=-p-1$ ისე დადებითია ან 0-ს ტოლი $q\neq 0$ რადგან $\frac{p}{q}$ არის წილადი. თუ q დადებითია ან ნატურალური რიცხვი. $t-k=e\cdot q=-2011\cdot q \Rightarrow t=k-2011\cdot q$.

$$f(k)=k-2011q$$

$$f(f(k))=f(k-2011q)=k-2011q-2011q=k-2011\cdot 2q=2011+k.$$

ანუ $-2011\cdot 2q=2011$ $q=-\frac{1}{2}$ მაგრამ q არის მთელი

თუ $e=-1$ $t-k=-1q$ $t=k-q$

$f(k)=k-q$ $f(f(k))=k-q-q=k-2q=2011+k$

$-2q=2011$ $q=-\frac{2011}{2}$ მაგრამ q მთელია

ანალოგიურად e-ების დანარჩენი მნიშვნელობებისთვის $e=1$ და $e=2011$ ზე იგივე მივიღებთ q წილადს მაგრამ დავუშვით რომ მთელია.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 380

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

თუ p და q [illegible]

$$(t-k)\frac{p+q}{q}=2011m$$

$t-k$ [illegible]

$(t-k)=e\cdot q$

$e=\frac{m}{n\cdot q}$ სადაც m და n [illegible] $(m;n)=1$

და $\frac{m}{n}\cdot(p+q)=2011$ [illegible] $p+q=\frac{O_1}{O_2}$ სადაც $(O_1;O_2)=1$

$\frac{m}{n}\cdot\frac{O_1}{O_2}=2011$ $\quad mO_1=2011n\cdot O_2$ $\quad$ [illegible] $(m;n)=1$ და $(O_1;O_2)=1$

და $(m;O_2)=d_1$ $\quad (O_1;n)=d_2$ $\quad O_1=s_1d_2$ $\quad O_2=s_2d_1$ $\quad n=n_1d_2$ $\quad m=m_1d_1$

$m_1\cancel{d_1}s_1\cancel{d_2}=2011\,n_1\cancel{d_2}\cdot s_2\cdot\cancel{d_1}$

$m_1s_1=2011\cdot n_1s_2 \Rightarrow n_1=s_2=1$ და $m_1s_1=2011$.

$n=d_2$ $\quad O_2=d_1$

$m_1=1;-1;2011;-2011.$

$m=1;\ s_1=2011$

$\frac{1}{\cancel{d_2}}\cdot\frac{s_1\cancel{d_2}}{d_1}=2011 \Rightarrow d_1=1 \Rightarrow m=1\quad O_2=1 \Rightarrow p+q$ [illegible]

$p+q=2011\cdot n$ [illegible] $n=-1;2011$ და -2011

[illegible]